

# Lebesguekonstanten bei der numerischen Differentiation periodischer Funktionen

WILHELM FORST UND ALEXANDER HOHL

*Abteilung für Mathematik IV der Universität,  
Oberer Eselsberg, D-7900 Ulm. West Germany*

*Communicated by Oved Shisha*

Received September 27, 1984

Let  $L_n f \in \tilde{P}_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , denote the trigonometric polynomial interpolating a given function  $f \in C_{2\pi}^1$  at the equidistant points  $x_j = 2\pi j / (2n + 1)$ ,  $j \in \mathbb{Z}$ . Then, with respect to the Chebyshev norm on  $C_{2\pi}$ , the estimate

$$\|f' - (L_n f)'\| \leq (1 + \lambda_{n,1}) \tilde{E}_n(f')$$

holds, where the Lebesgue constant  $\lambda_{n,1}$  is the maximum of a generalized Lebesgue function  $A_{n,1}$ . It turns out that  $A_{n,1}$  attains its maximum value

$$\lambda_{n,1} = \frac{1}{2n+1} \left( 1 + 2 \sum_{m=1}^n \frac{x_m}{\sin x_m} \right)$$

exactly at the interpolation points  $x_j, j \in \mathbb{Z}$ . The Lebesgue constants satisfy

$$\lambda_{n,1} = \log n + \delta_n.$$

where  $\delta_n$  decreases monotonically to  $C + \log(8/\pi) = 1.5119\dots$ . This improves results by R. Haverkamp (*Math. Z.* 179 (1982), 59-67). © 1986 Academic Press, Inc.

## 1. EINLEITUNG

Die trigonometrische Interpolation über den Knoten  $x_0 < x_1 < \dots < x_{2n} < x_0 + 2\pi =: x_{2n+1}$  ist eine lineare Projektion  $L_n$  des Raumes  $C_{2\pi}$  auf den Unterraum  $\tilde{P}_n$  der trigonometrischen Polynome vom Höchstgrade  $n$ .  $L_n$  besitzt die Darstellung

$$L_n f = \sum_{j=0}^{2n} f(x_j) l_j,$$

wobei  $l_j \in \tilde{P}_n$  die bekannten Lagrange-Grundpolynome sind. Bei Verwendung der Maximumnorm erhält man aus der Lebesguefunktion

$$A_n(x) = \sum_{j=0}^{2n} |l_j(x)|$$

die Abbildungsnorm

$$\|L_n\| = \max_{x \in \mathbb{R}} A_n(x),$$

mit deren Hilfe der Interpolationsfehler durch

$$\|f - L_n f\| \leq (1 + \|L_n\|) \tilde{E}_n(f)$$

abgeschätzt werden kann.

In der Literatur findet man eine Vielzahl von Untersuchungen (siehe [2]), die sich mit der Berechnung der Normen  $\|L_n\|$  und deren asymptotischen Verhalten für  $n \rightarrow \infty$  befassen. In dieser Arbeit werden analoge Resultate für gewisse Projektoren  $P_{n,k}$  hergeleitet, die bei der numerischen Differentiation auftreten. Hier gilt für  $f \in C_{2\pi}^k$  die Abschätzung

$$\|f^{(k)} - (L_n f)^{(k)}\| \leq (1 + \|P_{n,k}\|) \tilde{E}_n(f^{(k)}),$$

wobei die Norm des Operators  $P_{n,k}$  durch das Maximum der verallgemeinerten Lebesguefunktion

$$A_{n,k}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| 1 + \sum_{j=0}^{2n} h_k(t - x_j) l_j^{(k)}(x) \right| dt$$

gegeben ist.

Erste Untersuchungen zu dieser Art von Problemstellung gehen auf Schönhage [5], Baiguzov [1] und Haverkamp [3] zurück. Wie bei Haverkamp [3] liegt das Schwergewicht der Untersuchungen auf dem Spezialfall  $k=1$ . Von zentraler Bedeutung ist Satz 1, aus dem sich für beliebige Knoten wesentliche Aussagen über die Lebesguefunktionen ergeben (Satz 2). Für äquidistante Knoten erhält man damit eine explizite Darstellung der Lebesguefunktion, aus der sich leicht die in Frage stehenden Lebesguekonstanten ablesen lassen.

## 2. DIE PROJEKTOREN $P_{n,k}$

Wichtig für die folgenden Überlegungen ist die Integraldarstellung

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h_k(t-x) f^{(k)}(t) dt \quad (x \in \mathbb{R})$$

für Funktionen  $f \in C_{2\pi}^k$  (vgl. [6, p. 189]); dabei ist

$$h_k(t) = (-1)^{k+1} \frac{(2\pi)^k}{k!} \bar{B}_k\left(\frac{t}{2\pi}\right)$$

und  $\bar{B}_k$  die periodische Fortsetzung des  $k$ -ten Bernoullipolynoms.  
Die Projektoren

$$P_{n,k} : C_{2\pi} \rightarrow \tilde{P}_n$$

werden nun wie folgt gebildet. Zu  $g \in C_{2\pi}$  wähle man  $f \in C_{2\pi}^k$  mit

$$f^{(k)} = g - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(t) dt.$$

Solch ein  $f$  ist z.B. durch

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h_k(t-x) g(t) dt \tag{1}$$

gegeben.  $P_{n,k}$  wird dann durch

$$P_{n,k}g := (L_n f)^{(k)} + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(t) dt$$

definiert. Damit ist  $P_{n,k}g$  eindeutig bestimmt, denn für  $f, \tilde{f} \in C_{2\pi}^k$  mit

$$f^{(k)} = \tilde{f}^{(k)} = g - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(t) dt$$

folgt  $\tilde{f} - f = p \in \tilde{P}_0$ , also

$$L_n \tilde{f} = L_n f + p$$

und somit

$$(L_n \tilde{f})^{(k)} = (L_n f)^{(k)}.$$

Außerdem ist  $P_{n,k}$  eine lineare Projektion auf  $\tilde{P}_n$ , denn mit  $g \in \tilde{P}_n$  ist oben in (1) auch  $f \in \tilde{P}_n$  und damit  $L_n f = f$ . Daraus folgt

$$(L_n f)^{(k)} = f^{(k)} = g - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(t) dt$$

bzw.

$$P_{n,k}g = g.$$

Zur Berechnung von  $\|P_{n,k}\|$  seien nun  $g \in C_{2\pi}$  und  $f$  wie in (1) gegeben. Dann ist

$$\begin{aligned}(P_{n,k}g)(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(t) dt + (L_n f)^{(k)}(x) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(t) dt + \sum_{j=0}^{2n} f(x_j) l_j^{(k)}(x) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( 1 + \sum_{j=0}^{2n} h_k(t-x_j) l_j^{(k)}(x) \right) g(t) dt.\end{aligned}$$

Mit der verallgemeinerten Lebesguefunktion

$$A_{n,k}(x) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| 1 + \sum_{j=0}^{2n} h_k(t-x_j) l_j^{(k)}(x) \right| dt \quad (x \in \mathbb{R}) \quad (2)$$

erhalten wir dann die Abbildungsnormen

$$\|\hat{x} P_{n,k}\| := \sup_{\|g\| \leq 1} |(P_{n,k}g)(x)| = A_{n,k}(x)$$

und

$$\|P_{n,k}\| = \max_{x \in \mathbb{R}} A_{n,k}(x)$$

sowie für  $g \in C_{2\pi}$  die Abschätzung

$$\begin{aligned}\|P_{n,k}g - g\| &= \|(I - P_{n,k})(g - p)\| \\ &\leq (1 + \|P_{n,k}\|) \tilde{E}_n(g),\end{aligned}$$

wobei  $p$  das Proximum zu  $g$  in  $\tilde{P}_n$  ist. Folglich gilt für  $f \in C_{2\pi}^k$  die Abschätzung

$$\|(L_n f)^{(k)} - f^{(k)}\| \leq (1 + \|P_{n,k}\|) \tilde{E}_n(f^{(k)}).$$

Diese liefert sehr gute Fehlerschranken, sofern genaue Informationen über das quantitative Verhalten des Approximationsfehlers  $\tilde{E}_n(f^{(k)})$  sowie der Lebesguekonstanten  $\|P_{n,k}\|$  für  $n \rightarrow \infty$  vorliegen.

### 3. DIE LEBESGUEFUNKTION IM FALLE $k = 1$

Im Falle  $k = 1$  läßt sich die Darstellung (2) der Lebesguefunktion wegen

$$1 + \sum_{j=0}^{2n} h_1(t-x_j) l_j'(x) = 1 - \sum_{j=0}^{2n} x_j l_j'(x) - 2\pi \sum_{j=0}^k l_j'(x) =: f_k(x)$$

für  $t \in (x_k, x_{k+1})$ ,  $0 \leq k \leq 2n$ , zu

$$A_{n,1}(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{2n} (x_{k+1} - x_k) |f_k(x)|$$

vereinfachen. Für das Weitere sind somit Kenntnisse über das Vorzeichenverhalten der Folge

$$f_0(x), f_1(x), \dots, f_{2n}(x)$$

in Abhängigkeit von  $x \in \mathbb{R}$  wesentlich. Hierzu benötigen wir die folgende Variante eines Satzes von Obreschkoff [4, pp. 12–13].

**SATZ 1.** *Es seien  $P$  und  $Q$  zwei trigonometrische Polynome vom Höchstgrade  $n$ . Dann sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent:*

(i)  *$P$  und  $Q$  haben in jedem Periodenintervall  $2n$  reelle, sich strikt trennende Nullstellen.*

(ii) *Alle Funktionen  $F_{\lambda,\mu} := \lambda P + \mu Q$  mit  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0, 0\}$  verschwinden nicht identisch und haben  $2n$  reelle Nullstellen.*

Wir wenden nun Satz 1 auf die Funktionen  $f_0, \dots, f_{2n}$  an. Dazu wählen wir  $p, q \in \mathbb{N}$  mit  $0 \leq p < q \leq 2n$  und setzen  $P := f_p$  sowie  $Q := f_q$ . Nach Konstruktion sind  $P$  und  $Q$  trigonometrische Polynome vom Höchstgrade  $n$ . Für  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  betrachten wir die Stammfunktion  $G_{\lambda,\mu}$  von  $F_{\lambda,\mu} = \lambda P + \mu Q$ . Diese ist durch

$$G_{\lambda,\mu}(x) = (\lambda + \mu) \left( x - \sum_{j=0}^{2n} x_j l_j(x) \right) - 2\pi \left( \lambda \sum_{j=0}^p l_j(x) + \mu \sum_{j=0}^q l_j(x) \right)$$

gegeben und nimmt an den Stützstellen die Werte

$$\begin{aligned} G_{\lambda,\mu}(x_j) &= -2\pi(\lambda + \mu) & (0 \leq j \leq p) \\ &= -2\pi\mu & (p < j \leq q) \\ &= 0 & (q < j \leq 2n + 1) \end{aligned}$$

an. Mithin ist  $G_{\lambda,\mu}$  nicht konstant, und  $F_{\lambda,\mu}$  verschwindet nicht identisch. Ferner hat  $F_{\lambda,\mu}$  nach dem Satz von Rolle in den Intervallen  $(x_j, x_{j+1})$  ( $j=0, \dots, 2n$  mit  $j \neq p, q$ ) jeweils mindestens eine Nullstelle.  $F_{\lambda,\mu}$  hat also mindestens  $2n - 1$  reelle Nullstellen. Aus Periodizitätsgründen ergeben sich somit für  $F_{\lambda,\mu}$  exakt  $2n$  reelle Nullstellen. Mit Satz 1 folgt jetzt, daß die Nullstellen von  $f_p$  und  $f_q$  sich strikt trennen.

Wir wollen Genaueres über die Anordnung der Nullstellen aussagen. Speziell für  $G_{1,0}$  bzw.  $G_{0,1}$  ergeben die oben angestellten Überlegungen, daß

$P = G'_{1,0}$  in den Intervallen  $(x_j, x_{j+1})$  ( $0 \leq j \leq 2n, j \neq p$ ) bzw.  $Q = G'_{0,1}$  in den Intervallen  $(x_j, x_{j+1})$  ( $0 \leq j \leq 2n, j \neq q$ ) jeweils genau eine Nullstelle haben. Wegen  $p < q$  hat  $Q$  seine  $(p+1)$ te Nullstelle im Intervall  $(x_p, x_{p+1})$ ,  $P$  dagegen in  $(x_{p+1}, x_{p+2})$ . Bezeichnen  $\alpha_1^{(p)} < \dots < \alpha_{2n}^{(p)}$  bzw.  $\alpha_1^{(q)} < \dots < \alpha_{2n}^{(q)}$  die Nullstellen von  $f_p$  bzw.  $f_q$ , so ergibt  $\alpha_{p+1}^{(q)} < \alpha_{p+1}^{(p)}$  die Anordnung

$$\alpha_1^{(q)} < \alpha_1^{(p)} < \dots < \alpha_{2n}^{(q)} < \alpha_{2n}^{(p)}.$$

Zusammenfassend gilt

SATZ 2. Sind  $\alpha_1^{(k)} < \dots < \alpha_{2n}^{(k)}$  die Nullstellen der trigonometrischen Polynome

$$f_k(x) = 1 - \sum_{j=0}^{2n} x_j l_j(x) - 2\pi \sum_{j=0}^k l_j(x) \quad (3)$$

im Intervall  $[x_0, x_0 + 2\pi)$ ,  $0 \leq k \leq 2n$ , so gilt

$$\begin{aligned} x_0 < \alpha_1^{(2n)} < \dots < \alpha_1^{(1)} < x_1 < \alpha_1^{(0)} < \alpha_2^{(2n)} < \dots < \alpha_2^{(2)} < x_2 < \alpha_2^{(1)} \\ < \dots < \alpha_{2n}^{(2n)} < x_{2n} < \alpha_{2n}^{(2n-1)} < \dots < \alpha_{2n}^{(0)} < x_0 + 2\pi. \end{aligned}$$

#### 4. DIE LEBESGUEFUNKTION $A_{n,1}$ IM FALLE ÄQUIDISTANTER KNOTEN

Für die äquidistanten Knoten

$$x_j = \frac{2\pi j}{2n+1} \quad (0 \leq j \leq 2n)$$

gilt bekanntlich

$$l_j(x) = \frac{1}{2n+1} D_n(x - x_j),$$

wobei

$$D_n(u) := 1 + 2 \sum_{m=1}^n \cos(mu) = \frac{\sin(2n+1)(u/2)}{\sin(u/2)}$$

der sogenannte Dirichlet-Kern ist. Hieraus ergibt sich für die Polynome  $f_k$  aus (3)

$$f_k(x) = 1 + \sum_{m=1}^n \frac{x_m}{\sin(x_m/2)} \cdot \cos\left(m\left(x - \frac{(2k+1)\pi}{2n+1}\right)\right).$$

Wir erhalten damit die Darstellung

$$A_{n,1}(x) = \frac{1}{2n+1} \sum_{k=0}^{2n} \left| 1 + \sum_{m=1}^n \frac{x_m}{\sin(x_m/2)} \cos \left( m \left( x - \frac{(2k+1)\pi}{2n+1} \right) \right) \right|.$$

Um Genaueres über die Lebesguefunktion aussagen zu können, beweisen wir das folgende

LEMMA 1. Für  $0 \leq k \leq 2n$  gilt  $(-1)^k f_k(0) > 0$ .

Beweis. Wegen  $f_k = f_{2n-k}$  genügt der Beweis für  $0 \leq k \leq n$ . Mit

$$l'_0(0) = 0,$$

$$l'_j(0) = \frac{(-1)^{j+1}}{2 \sin(x_j/2)} \quad (1 \leq j \leq 2n)$$

folgt dann aus (3) durch einfache Umformung

$$f_k(0) = 1 + \sum_{j=1}^k (-1)^j \frac{x_j}{\sin(x_j/2)} + \sum_{j=k+1}^n (-1)^{j+1} \frac{\pi - x_j}{\sin(x_j/2)}.$$

Die Funktionen

$$\frac{x}{\sin(x/2)} \quad \text{und} \quad \frac{\pi - x}{\sin(x/2)}$$

sind für  $0 < x \leq \pi$  monoton wachsend bzw. fallend. Hiermit ergibt sich die Behauptung durch Fallunterscheidung für gerades bzw. ungerades  $k$ .

Für  $0 \leq m \leq 2n$  definieren wir

$$\begin{aligned} \phi_m(x) &:= \frac{1}{2n+1} \left\{ \sum_{k=0}^{2n-m} (-1)^k f_k(x) + \sum_{k=2n-m+1}^{2n} (-1)^{k+1} f_k(x) \right\} \\ &= \frac{1}{2n+1} \sum_{k=-m}^{2n-m} (-1)^k \left( 1 + \sum_{j=1}^n \frac{x_j}{\sin(x_j/2)} \cos \left( j \left( x - \frac{(2k+1)\pi}{2n+1} \right) \right) \right). \end{aligned}$$

Mit Lemma 1 und Satz 2 sowie durch einfache Umformung läßt sich für diese trigonometrischen Polynome der folgende Satz zeigen.

SATZ 3.

- (i)  $A_{n,1}(x) = \max \{ \phi_m(x) | 0 \leq m \leq 2n \},$
- (ii)  $\phi_0(x) = \frac{1}{2n+1} \left( 1 + 2 \sum_{j=1}^n \frac{x_j}{\sin x_j} \cos(jx) \right)$
- (iii)  $\phi_m(x) = (-1)^m \phi_0(x + x_m).$

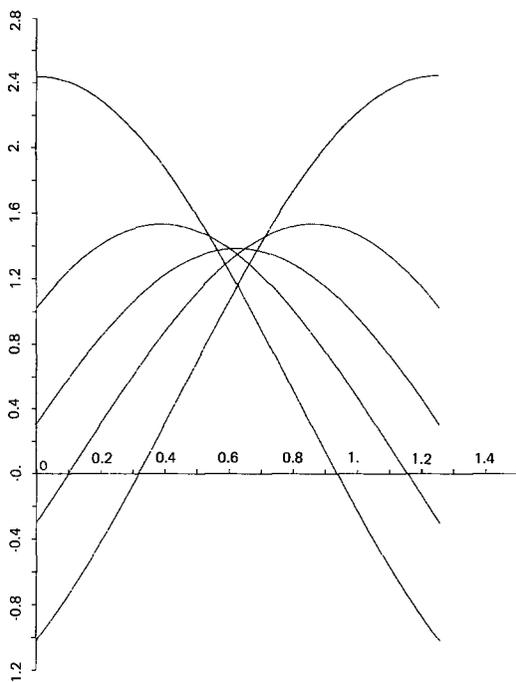


ABBILDUNG 1

Die Lebesguefunktion ist also die "obere Einhüllende" der Polynome  $\phi_0, \dots, \phi_{2n}$ , die durch Argumentshift auseinander hervorgehen. Abbildung 1 zeigt für den Fall  $n=2$  den Verlauf von  $\phi_0, \dots, \phi_4$  im Intervall  $[0, 2\pi/5]$ . Die sich hieraus ergebende Lebesguefunktion ist in Abbildung 2 in größerem Maßstab gezeichnet.

Wir können nun die Extremstellen der Lebesguefunktion angeben. Diese ergeben sich aus Satz 3 unter Berücksichtigung der Periodizitätseigenschaft

$$A_{n,1} \left( x + \frac{2\pi}{2n+1} \right) = A_{n,1}(x).$$

**KOROLLAR.** Die Lebesguefunktion  $A_{n,1}$  nimmt ihr absolutes Maximum

$$\|P_{n,1}\| = \frac{1}{2n+1} \left( 1 + 2 \sum_{j=0}^n \frac{x_j}{\sin x_j} \right)$$

genau in den Interpolationsknoten  $x_j = 2\pi j / (2n+1)$ ,  $j \in \mathbb{Z}$ , an.

Abschließend untersuchen wir das asymptotische Verhalten der Lebesguekonstanten  $\|P_{n,1}\|$ . In Anlehnung an Cheney und Rivlin [2] gilt

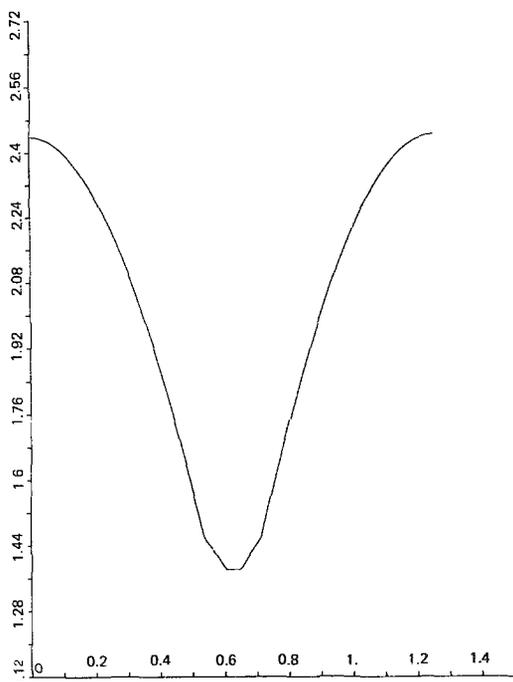


ABBILDUNG 2

LEMMA 2. Sei  $f \in C^3[0, 1]$  mit

- (i)  $f'''(x) \leq 0$  für  $0 \leq x \leq 1$ ,
- (ii)  $3f'(0) + f'''(0) \leq 0$ .

Dann konvergiert

$$Q_n(f) := \frac{1}{2n+1} \left( f(0) + 2 \sum_{j=1}^n f\left(\frac{2j}{2n+1}\right) \right)$$

monoton fallend gegen

$$\int_0^1 f(x) dx.$$

Lemma 2 ist auf die Funktion

$$f(x) = \frac{\pi x}{\sin(\pi x)} - \frac{1}{1-x}$$

anwendbar und ergibt dann das folgende Resultat.

SATZ 4. Für die Lebesguekonstanten gilt

$$\|P_{n,1}\| = \log n + \delta_n \quad (n = 1, 2, \dots),$$

wobei  $\delta_n$  monoton von  $\frac{1}{3} + 8\pi/9\sqrt{3} = 1.945599\dots$  auf den Wert  $C + \log(8/\pi) = 1.511927\dots$  fällt.

#### LITERATUR

1. N. S. BAIGUZOV, Approximate differentiation by means of Lagrange and Hermite interpolation polynomials, *Soviet Math. Dokl.* **9** (1968), 1076–1079.
2. E. W. CHENEY AND T. J. RIVLIN, A note on some Lebesgue constants, *Rocky Mountain J. Math.* **6** (1976), 435–439.
3. R. HAVERKAMP, Approximationsgüte der Ableitungen bei trigonometrischer Interpolation, *Math. Z.* **179** (1982), 59–67.
4. N. OBRESCHKOFF, “Verteilung und Berechnung der Nullstellen reeller Polynome,” VEB Deutscher Verlag d. Wiss., Berlin, 1963.
5. A. SCHÖNHAGE, Lebesguekonstanten bei numerischer Differentiation, *Math. Z.* **94** (1966), 79–83.
6. A. SCHÖNHAGE, “Approximationstheorie,” de Gruyter, Berlin/New York, 1971.